

3. МОДЕЛІ ВИПАДКОВОЇ КОМПОНЕНТИ ЧАСОВИХ РЯДІВ

3.1. Основні визначення

Випадкову компоненту часового ряду, а також і сам ряд можна розглядати як реалізацію певного випадкового процесу.

Випадковим процесом Y , заданим на множині T , називають таку функцію від t , значення якої при будь-якому $t \in T$ є випадковими величинами. Основними числовими характеристиками, що відображають властивості випадкових процесів, є їх математичне сподівання, коваріаційна та кореляційна функції.

Математичним сподіванням випадкового процесу називають таку функцію $m(t)$, яка для будь-якого $t \in T$ набуває значення, що є математичним сподіванням випадкової величини Y_t : $m(t) = MY_t$.

Коваріаційною функцією випадкового процесу $Y(t)$ називають величину:

$$\text{cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = M[(Y_{t_1} - m(t_1))(Y_{t_2} - m(t_2))]. \quad (3.1)$$

При $t_1 = t_2$ значенням коваріаційної функції є дисперсія випадкового процесу:

$$D(Y(t)) = \text{cov}(Y_t, Y_t). \quad (3.2)$$

Квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(t) = \sqrt{\text{cov}(Y_t, Y_t)}. \quad (3.3)$$

називають **стандартним відхиленням** випадкового процесу.

Кореляційною функцією випадкового процесу називають величину

$$\rho(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = \frac{\text{cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2})}{\sigma(Y_{t_1})\sigma(Y_{t_2})}. \quad (3.4)$$

Спеціальним випадком випадкових процесів є стаціонарні процеси. Їх часто застосовують як моделі випадкової компоненти часових рядів. Вони мають властивість ергодичності, яка полягає в тому, що се-

редне за часом збігається із середнім за множиною спостережень. У цьому разі, згідно з теоремою Біркгофа–Хінчина, основні характеристики процесу можна наближено оцінити за однією реалізацією відповідного процесу.

Часовий ряд називають **строго стаціонарним**, або **стаціонарним у вузькому розумінні**, якщо спільний розподіл n спостережень $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$ є таким самим, як і для n спостережень $y_{t_1+\tau}, y_{t_2+\tau}, \dots, y_{t_n+\tau}$ при будь-яких $m, t_1, t_2, \dots, t_n, \tau$.

У практиці частіше використовують поняття **слабкої стаціонарності** (**стаціонарності в широкому розумінні, коваріаційної стаціонарності**). У цьому разі середнє, дисперсія та коваріація ряду мають бути незалежними від часу:

$$\begin{aligned} M(y_t) &= M(y_{t+\tau}) = \mu = \text{const}; \\ D(y_t) &= M(y_t - \mu)^2 = D(y_{t+\tau} - \mu)^2 = D(y_{t+\tau}) = \gamma(0) = \text{const}; \\ \text{cov}(y_t, y_{t+\tau}) &= M[(y_t - \mu)(y_{t+\tau} - \mu)] = \gamma(\tau) = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Надалі під стаціонарністю ряду ми будемо розуміти його слабку стаціонарність.

Прикладом стаціонарного ряду є **білий шум**, який задовольняє такі вимоги:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t; \\ M(\varepsilon_t) &= 0; \\ M(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+\tau}) &= \begin{cases} \sigma_0^2 & (\tau = 0); \\ 0 & (\tau \neq 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Звідси маємо, що $\gamma(0) = \sigma_0^2$, а при $\tau > 0$ $\gamma(\tau) = 0$ та $\rho(\tau) = 0$. При цьому дисперсія σ_0^2 не залежить від t .

З погляду практичного застосування стаціонарним вважають такий випадковий процес, реалізації якого є коливаннями відносно деякого сталого середнього значення; при цьому амплітуда й період цих коливань не змінюються з часом. Прикладами таких процесів є коливання напруги в електричній мережі, або шуми радіоапаратури. Нестационарні процеси, на відміну від стаціонарних, мають певну тенденцію розвитку

у часі. Характеристики таких процесів змінюються з часом і залежать від початку відліку. Реальні процеси завжди є нестационарними, але у певних умовах їх з певним наближенням можна розглядати як стаціонарні. Як правило, випадковий процес у будь-якій динамічній системі починається з нестационарної стадії – так званого перехідного процесу. Через певний час, якщо зовнішні умови не змінюються, він переходить до певного усталеного режиму, який можна розглядати як стаціонарний випадковий процес.

Якщо випадкові величини, що утворюють процес, підпорядковуються нормальному закону розподілу, то процес називають **гаусовим**.

Коваріацію, яка характеризує зв'язок між рівнями одного ряду, називають **автоковаріацією**. Для стаціонарного часового ряду вона залежить тільки від зсуву в часі τ , але не залежить від часу t . Залежність $\gamma(\tau)$ називають **автоковаріаційною функцією**. При $\tau = 0$ вона дорівнює дисперсії часового ряду.

Значення автоковаріаційної функції можна розрахувати за наявними рівнями ряду за формулою:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} \left((y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y}) \right), \quad (3.7)$$

де $\tau = 1, 2, \dots, n - 1$, $\bar{y} = \sum_{t=1}^n y_t / n$.

Функцію

$$\rho(\tau) = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+\tau})}{D(y_t)} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \quad (3.8)$$

називають **автокореляційною**. Її значення характеризують степінь статистичного зв'язку між рівнями часового ряду, розділеними проміжком часу τ . Перевагою автокореляційної функції перед автоковаріаційною є безрозмірність її значень, а також їх незалежність від одиниць вимірювання рівнів. Графік автокореляційної функції називають **корелограмою**. Автокореляційна функція має такі властивості: $|\rho(\tau)| \leq 1$; $\rho(0) = 1$; $\rho(-\tau) = \rho(\tau)$. Остання властивість дає можливість при дослідженні ав-

токореляційної функції обмежуватися лише випадком додатних значень τ .

Вибіркову оцінку коефіцієнта автокореляції можна отримати за формулою:

$$\rho(\tau) = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}. \quad (3.9)$$

Її чисельник є вибірковою оцінкою коефіцієнта автоковаріації. При практичних розрахунках рекомендується обирати $\tau \leq n/4$.

Для стаціонарних часових рядів із зростанням параметра τ взаємозв'язок між рівнями y_t та $y_{t+\tau}$ має послаблюватися, тому автокореляційна функція стаціонарного процесу буде монотонно згасати. В окремих випадках існує порогове значення τ_0 , починаючи з якого всі значення $\rho(\tau)$ тотожно дорівнюють нулю. При побудові емпіричних автокореляційних функцій за формулою (3.9) властивість монотонного згасання автокореляційної функції стаціонарного часового ряду може порушуватися.

У практиці аналізу часових рядів застосовують також **частинні автокореляційні функції**, які є очищеними від опосередкованого впливу проміжних членів ряду, розташованих між y_t й $y_{t+\tau}$. Значення частинних автокореляцій першого й другого порядків можна розрахувати за формулами:

$$\rho_{\text{part}}(2) = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}; \quad (3.10)$$

$$\rho_{\text{part}}(3) = \frac{\rho_1 - \rho_2 \rho_3}{\sqrt{(1 - \rho_2^2)(1 - \rho_3^2)}}, \quad (3.11)$$

де

$$\rho_1 = \frac{\rho(3) - \rho(1)\rho(2)}{\sqrt{(1 - \rho^2(1))(1 - \rho^2(2))}};$$

$$\rho_2 = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)};$$

$$\rho_3 = \frac{\rho(1) - \rho(1)\rho(2)}{\sqrt{(1 - \rho^2(1))(1 - \rho^2(2))}}.$$

Частинні автокореляції вищих порядків визначають за загальними формулами розрахунку частинних коефіцієнтів кореляції.

Для оцінювання числових характеристик часового ряду необхідно мати достатньо велику кількість його реалізацій. Але на практиці, зокрема для рядів соціально-економічної, екологічної, демографічної динаміки тощо наявна лише одна реалізація кожного аналізованого ряду. У таких випадках розрахунок числових характеристик є можливим лише для стаціонарних рядів.

Середнє за реалізаціями можна обчислити за формулою (1.1). Оцінку дисперсії часового ряду розраховують за формулою:

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2. \quad (3.12)$$

Оцінку значень автокореляційної функції отримують, використовуючи формулу:

$$\rho(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}. \quad (3.13)$$

На основі оцінок характеристик ряду, отриманих за формулами (1.1; 3.12; 3.13), можна зробити висновок, чи є його випадкова компонента білим шумом. За виконання цієї умови величину $\bar{y}$ можна використовувати як точковий прогноз значень рівнів ряду, а величину s_y^2 застосовувати для побудови його довірчого інтервалу.

Значення оцінок автокореляційної функції білого шуму для всіх $\tau \geq 1$ дорівнюють нулю. Це означає, що такий ряд не має внутрішньої структури, тобто його елементи незалежні один від одного. У разі, коли

автокореляційна функція має значення, що істотно відрізняються від нуля при $\tau \geq 1$, необхідно підібрати модель, придатну для опису випадкової компоненти.

3.2. Моделі стаціонарних часових рядів

Для опису стаціонарних часових рядів часто можна використовувати модель **загального лінійного процесу**, яка подає його у вигляді зваженої суми поточного та попередніх значень білого шуму:

$$\varepsilon_t = \delta_t + \beta_1 \delta_{t-1} + \beta_2 \delta_{t-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \delta_{t-k}, \quad (3.14)$$

де $\beta_0 = 1$ і $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$.

Еквівалентну (3.14) модель можна записати, використовуючи значення не білого шуму, а самого стаціонарного ряду в усі попередні (у тому числі нескінченно віддалені) моменти часу:

$$\varepsilon_t = \pi_1 \varepsilon_{t-1} + \pi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \varepsilon_{t-k}. \quad (3.15)$$

При цьому вагові коефіцієнти π_k пов'язані певними умовами, що забезпечують стаціонарність ряду. Такі моделі часто називають моделями авторегресії (**AR-моделі**).

Поряд із загальним лінійним процесом розглядають також процеси **змішаного типу** – **ARMA (АРКС)** моделі¹, які містять авторегресійні члени самого процесу і ковзні середні білого шуму:

$$\varepsilon_t = \sum_{k=1}^p \pi_k \varepsilon_{t-k} + \delta_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \delta_{t-j}, \quad (3.16)$$

а також **МА-моделі**, що містять тільки ковзні середні.

Для практичних застосувань використовують таблицю Бокса–Дженкінсона (табл. 3.1), яка дає змогу робити вибір на основі значень автокореляційної (АКФ) й частинної автокореляційної (ЧАКФ) функцій.

¹ Для нестационарних рядів використовують моделі **ARIMA** (АРПКС – авторегресії та проінтегрованого ковзного середнього)

Значення частинної автокореляційної функції отримують так. Перше значення $h(1) = \rho(1)$. Для обчислення j -го значення ($j \geq 2$) будують послідовність:

$$y_t = \phi_{1j} \cdot y_{t-1} + \phi_{2j} \cdot y_{t-2} + \dots + \phi_{jj} \cdot y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (3.17)$$

де ε_t – білий шум, оцінюють її параметри за методом найменших квадратів і беруть $h(j) = \phi_{jj}$.

У табл. 3.2 наведено рівняння основних ARMA-моделей. Процедура підбору адекватної моделі випадкової компоненти є досить трудомісткою, тому зазвичай її виконують за допомогою спеціальних пакетів аналізу часових рядів або аналізу даних (SPSS, ЭВРИСТА, Forecast Expert).

Таблиця 3.1

Характеристики ARMA-моделей

Модель	АКФ	ЧАКФ
Білий шум	Усі нулі	Усі нулі
MA(1)	Нулі після $\rho(1)$	Згасає після $h(1)$
MA(q)	Нулі після $\rho(q)$	Згасає після $h(q)$
AR(1)	Геометрично згасає після $\rho(1)$	Нулі після $h(1)$
AR(p)	Геометрично згасає після $\rho(p)$	Нулі після $h(p)$
ARMA(1,1)	Геометрично згасає після $\rho(1)$	Згасає після $h(1)$
ARMA(p,q)	Геометрично згасає після $\rho(p)$	Згасає після $h(q)$

Таблиця 3.2

Рівняння основних ARMA-моделей

Модель	Рівняння моделі
MA(1)	$u_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3.18)$
MA(2)	$u_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (3.19)$
MA(q)	$u_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.20)$

AR(1)	$u_t = \delta + \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$	(3.21)
AR(2)	$u_t = \delta + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$	(3.22)
AR(p)	$u_t = \delta + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + \varepsilon_t$	(3.23)
ARMA(1,1)	$u_t = \delta + \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t - q_1 \varepsilon_{t-1}$	(3.24)
ARMA(p,q)	$u_t = \delta + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$	(3.25)

Найпростішою моделлю є **авторегресія першого порядку AR(1)**, тобто **марківський процес**:

$$\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1} + \delta_t, \quad (3.26)$$

де $|\alpha| < 1$.

Дисперсію марківського процесу можна розрахувати за формулою:

$$D\varepsilon_t = \sigma_0^2 / (1 - \alpha^2), \quad (3.27)$$

де σ_0^2 – дисперсія білого шуму δ_t . Якщо α наближається до одиниці, то дисперсія часового ряду істотно перевищує дисперсію білого шуму, тому амплітуда коливань залишків буде великою порівняно з амплітудою вихідних змущень δ_t .

Графік марківського процесу є рядом більш-менш регулярних осциляцій. Середня відстань між їх піками дається виразом:

$$\langle d \rangle = \frac{2\pi}{\arccos[0,5(\alpha - 1)]}. \quad (3.28)$$

Зокрема, для випадкової послідовності, що має стандартний нормальний розподіл, середня відстань дорівнює трьом, оскільки в цьому разі $\alpha = 0$ і $\arccos(-0,5) = 2\pi/3$. Для марківських процесів вона варіює в межах від трьох до чотирьох.

Автокореляційна функція марківського процесу може бути записаною так:

$$\rho(\tau) = \alpha^\tau. \quad (3.29)$$

Звідси $\alpha = \rho(1)$, тобто є коефіцієнтом автокореляції для величини зсуву, що дорівнює одиниці.

Значення часткової автокореляційної функції дорівнюють нулю при всіх значеннях зсуву, крім одиниці ($\tau = 2, 3, \dots$). Ці властивості можна застосовувати для ідентифікації моделі.

Спектральну щільність марківського процесу можна розрахувати за формулою:

$$\phi(\omega) = \frac{2\sigma_0^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi\omega)}, \quad (3.30)$$

де $\omega = \omega / 2\pi$; $0 \leq \omega \leq 0,5$.

Якщо параметр α наближається до $+1$, то сусідні значення ряду залишків є близькими один до одного, автокореляційна функція згасає за експоненціальним законом, залишаючись при цьому додатною, а у спектрі переважають низькі частоти, тобто відстань між піками є великою. У разі, коли параметр α наближається до -1 , ряд швидко осцилює, у спектрі переважають високі частоти, і автокореляційна функція експоненціально згасає до нуля. При цьому спостерігається чергування знаків для значень автокореляційної функції.

Ідентифікація моделі передбачає статистичне оцінювання її параметрів (α, σ_0^2) за наявними значеннями рівнів вихідного ряду, яке можна здійснити методом моментів. Це потребує попереднього виокремлення невинної складової ряду, що дає можливість перейти до аналізу ряду залишків $\varepsilon_t = y_t - f(t)$.

Спочатку розраховують вибірккову дисперсію:

$$\gamma(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2. \quad (3.31)$$

Оцінку параметра α можна отримати за формулою:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t+1} - \bar{\varepsilon})}{\gamma(0)}, \quad (3.32)$$

а оцінку σ_0^2 – за формулою:

$$\sigma_0^2 = (1 - \alpha^2) \gamma(0). \quad (3.33)$$

Більшість методів згладжування автоматично забезпечує виконання умови $\bar{\varepsilon} \equiv 0$. У таких випадках значення $\bar{\varepsilon}$ в (3.31) і (3.32) слід брати рівним нулю. Елементи автокореляційної функції доцільно оцінювати за формулою (3.29). Їх пряма оцінка за формулою (3.9) зазвичай є незадовільною, оскільки побудована за її допомогою вибіркова корелограма може містити коливання, що не згасають.

Модель авторегресії другого порядку (AR-2), або процес Юла, записують у вигляді:

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \delta_t. \quad (3.34)$$

Необхідні й достатні умови стаціонарності ряду можна записати у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} |\alpha_1| < 2; \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases} \quad (3.35)$$

Значення автокореляційної функції розраховують за формулами:

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}; \quad (3.36)$$

$$\rho(2) = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2}; \quad (3.37)$$

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2). \quad (3.38)$$

Графік часового ряду, що відповідає процесу Юла, як і в попередньому випадку, має псевдоперіодичний характер із середньою відстанню між піками:

$$\langle d \rangle = \frac{2\pi}{\arccos[-0,5(1 - \alpha_1 + \alpha_2)]}, \quad (3.39)$$

яка знаходиться у межах від чотирьох до шості.

Спектральну щільність процесу Юла можна розрахувати за формулою:

$$\phi(\omega) = \frac{2\sigma_0^2}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1(1 - \alpha_2)\cos(2\pi\omega) - 2\alpha_2\cos(4\pi\omega)} \quad (3.40)$$

де $0 \leq \omega \leq 0,5$.

Ідентифікація моделі передбачає виокремлення невинуватливої складової і формування ряду залишків $\varepsilon_t = y_t - f(t)$. Потім за формулою (3.31) обчислюють вибіркoву дисперсію $\gamma(0)$. Наступним етапом є одержання оцінок коефіцієнтів автокореляції:

$$\rho(k) = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t+k} - \bar{\varepsilon})}{\gamma(0)}, \quad k = 1, 2. \quad (3.41)$$

Як і в попередньому випадку, значення $\bar{\varepsilon}$ можна взяти рівним нулю, якщо методика побудови невинуватливої складової забезпечує виконання цієї умови.

Далі за формулами:

$$\alpha_1 = \frac{\rho(1)(1 - \rho(2))}{1 - \rho^2(1)}; \quad (3.42)$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}; \quad (3.43)$$

$$\sigma_0^2 = \gamma(0) \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2} \left[(1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 \right] \quad (3.44)$$

розраховують параметри моделі.

Модель ковзного середнього першого порядку можна подати у вигляді:

$$\varepsilon_t = \delta_t - \theta \delta_{t-1}. \quad (3.45)$$

Вона є стаціонарною за будь-яких значень параметра θ і оборотною при $|\theta| < 1$. Оборотність моделі означає можливість її еквівалентного запису як моделі авторегресії нескінченного порядку:

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j} + \delta_t. \quad (3.46)$$

Значення автокореляційної функції розраховуються за формулою:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} -\theta/(1+\theta^2), & \tau = 1; \\ 0 & \tau \geq 2. \end{cases} \quad (3.47)$$

Спектральну щільність можна розрахувати за формулою:

$$\phi(\omega) = 2\sigma_0^2 (1 + \theta^2 - 2\theta \cos(2\pi\omega)), \quad (3.48)$$

де $0 \leq \omega \leq 0,5$.

Ідентифікація моделі передбачає розв'язання рівняння:

$$\theta^2 + \frac{\theta}{\rho(1)} + 1 = 0. \quad (3.49)$$

Із його двох розв'язків вибирають той, що задовольняє умову оборотності $|\theta| < 1$. Єдиність такого розв'язку впливає з того, що вільний член квадратного рівняння дорівнює добутку його розв'язків.

3.3.

При ідентифікації випадкової компоненти необхідно враховувати такі апріорні властивості:

- ◆ середнє значення випадкової компоненти має бути рівним нулю, або $\sum_{t=1}^T \varepsilon_t = 0$;
- ◆ автокореляція для випадкової компоненти має бути відсутня;

◆ внесок випадкової компоненти у загальну мінливість має бути малим порівняно з циклічними компонентами.