

Временные ряды: теоретические основы

11.1. Введение

Что такое временной ряд. Временной ряд — это последовательность чисел; его элементы — это значения некоторого протекающего во времени процесса. Они измерены в последовательные моменты времени, обычно через равные промежутки.

Как правило, составляющие временной ряд числа — *элементы временного ряда*, — нумеруют в соответствии с номером момента времени, к которому они относятся (например, x_1 , x_2 , x_3 и т.д.). Таким образом, порядок следования элементов временного ряда весьма существен.

Почти в каждой области знания встречаются явления, которые важно изучать в развитии во времени или пространстве. И почти всегда в закономерное течение явления вмешивается случай в виде случайных импульсов, случайных помех, случайных ошибок и т.д. Поэтому изучение временных рядов — это составная часть прикладной статистики (и довольно важная ее часть).

Расширения понятия временного ряда. Понятие временного ряда часто толкуют расширительно. Например, одновременно могут регистрироваться несколько характеристик упомянутого процесса. В этом случае говорят о *многомерных временных рядах*. Если измерения производятся непрерывно, говорят о временных рядах с непрерывным временем, или *случайных процессах*. Наконец, текущая переменная может иметь не временной, а какой-нибудь иной характер, например пространственный (тогда говорят о *случайных полях*).

Примеры временных рядов. Данные типа временных рядов широко распространены в самых различных областях человеческой деятельности. В экономике это ежедневные цены на акции, курсы валют, еженедельные и месячные объемы продаж, годовые объемы производства и т.п. В метеорологии типичными временными рядами являются ежедневная температура, месячные объемы осадков, в гидрологии — периодически измеряемые уровни воды в реках. В технике времен-

е ряды возникают в результате отслеживания различных параметров технологических процессов.

На рис. 11.1 приведены примеры различных временных рядов (для наглядности последовательные измерения, составляющие временной ряд, на графиках соединены линиями).

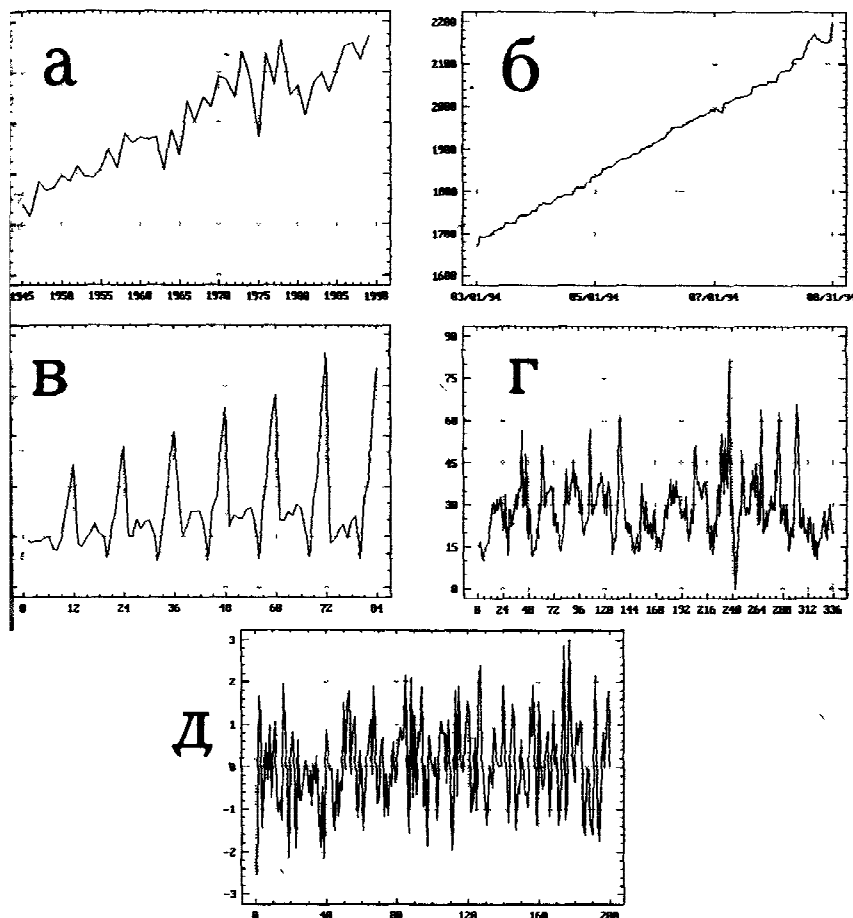


Рис. 11.1. а) – урожайность зерновых культур в СССР с 1945 по 1989 гг. в ц/га; б) – курс доллара на торгах ММВБ с 1.03 по 31.08 1994 г. в рублях; в) – ежемесячные продажи шампанского за 7 последовательных лет; г) – среднечасовая нагрузка телекоммуникационного канала Москва – Париж в течение 2-х недель (в Кбит/сек); д) – гауссовский «белый шум» с параметрами 0 и 1

Видно, что поведение временных рядов может быть весьма различным. Так, динамика урожайности зерновых в СССР (ряд а)) имеет

скорее всего линейный тренд, отклонения от которого можно считать независимыми случайными величинами. Курс доллара на торгах ММВБ весной-летом 1994 г. (ряд б)) также содержит линейный тренд, однако отклонения от него имеют более сложную статистическую структуру, чем в предыдущем случае. График ежемесячных продаж шампанского (ряд в)) содержит явно повторяющиеся годовые циклы с возрастающей амплитудой. Среднечасовая загрузка телекоммуникационного канала Москва-Париж в течение двух недель (одна неделя равна 168 часам) февраля 1996 г. (ряд г)) имеет ясные суточные циклы. Кроме суточных, этот ряд содержит и недельные циклы, но на приведенном графике они заметны мало, так как недостаточно длителен интервал наблюдения. Ряд д) создан датчиком нормальных случайных чисел на компьютере и служит примером чисто случайного процесса без внутренних закономерностей и зависимостей.

Измерение значений временного ряда. Чаще всего значения временного ряда получаются непосредственной записью значений некоторого процесса через определенные промежутки времени. Например, если ежесуточно в определенное время записывать показания термометра, то получится временной ряд со значениями температуры в том месте, в котором находится термометр.

Иногда значения элементов временного ряда получаются накоплением некоторых данных за определенный промежуток времени (например, суммарное число посетителей магазина за день), усреднением (средняя температура за день) и т.д.

11.2. Анализ временных рядов и его разделы

Анализ временных рядов. Исследование временных рядов отличается от других задач анализа данных как кругом представляющих интерес вопросов, так и методами, применяемыми для исследования. Поэтому наука об исследовании временных рядов — *анализ временных рядов*, — образует самостоятельную и весьма обширную область статистики.

Разделы анализа временных рядов. Временные ряды, возникающие в различных предметных областях, имеют различную природу, поэтому для их изучения оказались эффективными разные методы. Исследователи придумывали и развивали многочисленные методы анализа, подходящие для изучения временных рядов в разных предметных областях. И в результате анализ временных рядов превратился в довольно

разветвленную науку. Вот только некоторые из видов временных рядов, исследование которых можно рассматривать как самостоятельный раздел теории анализа временных рядов:

- *стационарные случайные процессы*, то есть последовательности случайных величин, вероятностные свойства которых не изменяются во времени. Стационарные случайные процессы широко применяются в радиотехнике, теории связи, механике жидкости и газа, океанологии, метеорологии и т.д.;
- *диффузионные процессы* возникли при изучении процесса диффузии, то есть взаимопроникновения различных жидкостей или газов. Эти процессы используются при построении моделей непрерывных процессов, в которых существенна случайная составляющая;
- *точечные процессы* используют для описания таких явлений, как поступление вызовов или заявок на обслуживание, моментов несчастных случаев, стихийных и техногенных катастроф, каких-либо приметных явлений и т.п. Они широко применяются в таких разделах статистики, как теория очередей, теория массового обслуживания и т.д.

Всех этих обширных разделов анализа временных рядов в данной книге мы касаться не будем. Вместо этого мы хотим рассказать о тех прикладных аспектах анализа временных рядов, которые полезны и важны при решении практических задач в экономике, финансах, а также в различных гуманитарных науках. В частности, мы расскажем о методах подбора математической модели для описания временного ряда, об изучении взаимозависимостей временных рядов, выявления в них периодических и других составляющих, прогнозировании поведения временных рядов и т.д.

Как мы будем рассказывать об анализе временных рядов. В этой главе (главе 11) мы обсудим основные понятия статистической теории временных рядов. Мы расскажем о структуре временных рядов; о вероятностных предпосылках для их анализа; о детерминированных компонентах временных рядов и о причинах, их порождающих; о корреляционной структуре ряда; о случайной составляющей временного ряда и ее описании и т.д. В главе 12 обсуждаются вопросы прикладного анализа временных рядов, а в главе 13 мы опишем, как различные практические задачи анализа временных рядов решаются с помощью статистических пакетов Эвриста и SPSS. Наконец, в главе 14 мы вновь возвратимся к теории и расскажем о некоторых математических моделях временных рядов, важных для прикладного анализа.

Мы будем стараться вести изложение на уровне, доступном широкому читателю. Наш рассказ мы сопроводим обсуждением примеров (как тех, что привели на рис. 11.1, так и многих других).

Литература. Те читатели, которые захотят глубже изучить теоретические или прикладные аспекты анализа временных рядов, могут обратиться к литературе. По большинству разделов анализа временных рядов существует множество книг разной степени подробности и математической сложности. Одни из этих книг рассчитаны на математиков, другие — на практических работников и инженеров. Укажем некоторые наиболее известные из этих книг:

- в области теории временных рядов — [6], [97], [51], [123], [127], [25];
- в области общего прикладного анализа — [13], [14], [17], [52], [87], [11];
- в области прикладного спектрального анализа — [37], [75];
- в области радиотехнических приложений — [62], [31];
- в области экономических приложений — [130], [67] и др.

11.3. Цели, этапы и методы анализа временных рядов

Цели анализа временных рядов. При практическом изучении временных рядов исследователь на основании наблюдаемого отрезка временного ряда (конечной длины) должен сделать выводы о свойствах этого ряда и о вероятностном механизме, порождающем этот ряд. Чаще всего при изучении временных рядов ставятся следующие цели:

- краткое (сжатое) описание характерных особенностей ряда;
- подбор статистической модели (моделей), описывающей временной ряд;
- предсказание будущих значений на основе прошлых наблюдений;
- управление процессом, порождающим временной ряд.

На практике эти и подобные цели достижимы далеко не всегда и далеко не в полной мере. Часто этому препятствует недостаточный объем наблюдений (недостаточная длительность); еще чаще — изменяющаяся с течением времени статистическая структура временного ряда. Из-за этих изменений значение прошлых наблюдений обесценивается, и они уже не помогают предвидеть будущее.

Стадии анализа временных рядов. Обычно при практическом анализе временных рядов последовательно проходят следующие этапы:

- графическое представление и описание поведения временного ряда;
- выделение и удаление закономерных составляющих временного ряда, зависящих от времени: тренда, сезонных и циклических составляющих;
- выделение и удаление низко- или высокочастотных составляющих процесса (фильтрация),
- исследование случайной составляющей временного ряда, оставшейся после удаления перечисленных выше составляющих;
- построение (подбор) математической модели для описания случайной составляющей и проверка ее адекватности;
- прогнозирование будущего развития процесса, представленного временным рядом,
- исследование взаимодействий между различными временными рядами

Методы анализа временных рядов. Для решения указанных выше (а также многих других) задач исследователями предложено большое количество различных методов. Отметим из них наиболее распространенные:

- *корреляционный анализ* позволяет выявить существенные периодические зависимости и их *лаги* (задержки) внутри одного процесса (автокорреляция) или между несколькими процессами (кросс-корреляция);
- *спектральный анализ* позволяет находить периодические и квазипериодические составляющие временного ряда;
- *сглаживание и фильтрация* предназначены для преобразования временных рядов с целью удаления из них высокочастотных или сезонных колебаний;
- *модели авторегрессии и скользящего среднего* оказываются особенно полезными для описания и прогнозирования процессов, проявляющих однородные колебания вокруг среднего значения;
- *прогнозирование* позволяет на основе подобранной модели поведения временного ряда предсказывать его значения в будущем.

Как уже говорилось, в этой книге мы расскажем не обо всех из этих методов, а лишь о тех, которые наиболее важны для экономических и гуманитарных наук.

11.4. Детерминированная и случайная составляющие временного ряда

Следуя основной идее статистики, при анализе временного ряда видимую его изменчивость стараются разделить на закономерную и случайную составляющие. Закономерные изменения членов временного ряда следуют какому-то определенному правилу и поэтому предсказуемы. Эта составляющая x_t может быть вычислена при каждом t как некоторая функция от текущего момента t . Эта функция может зависеть, помимо t , также от некоторого набора параметров. Когда эти параметры неизвестны, их приходится оценивать по имеющимся наблюдениям — как, например, бывает в случае регрессии.

Изменчивость, оставшаяся необъясненной, иррегулярна и хаотична. Для ее описания необходим статистический подход (за неимением лучшего).

Определение. *Под закономерной (детерминированной) составляющей временного ряда $x_1, \dots, x_n$ мы будем понимать числовую последовательность $d_1, \dots, d_n$, элементы которой d_t вычисляются по определенному правилу как функция времени t .*

Детерминированная составляющая часто отражает действия каких-либо определенных факторов или причин. Так, у временных рядов из различных областей техники детерминированная составляющая обычно обязана своим возникновением действиям физических законов или условиям эксплуатации оборудования. Например, если значения временного ряда соответствуют положениям маятника в определенные моменты времени, то в качестве детерминированной компоненты ряда можно взять решение дифференциального уравнения движения маятника в эти моменты времени. В экономических и многих других приложениях математические модели изучаемых процессов нам обычно не известны, так что тенденции, отраженные в поведении временного ряда, нам приходится выявлять по наблюдаемым значениям временного ряда. Например, при изучении данных о месячном производстве молока в России (рис. 11.2) мы можем попытаться описать закономерную часть данного временного ряда в виде комбинации линейной функции (в течение последних лет производство молока, нашедшее отражение в статистической отчетности, постепенно уменьшалось) и периодической функции с периодом 12 месяцев. Эта периодическая компонента отражает влияние времени года на производство молока.

Для многих рядов в экономике и социальных науках причины, порождающие их закономерные составляющие, могут не быть столь ясными.

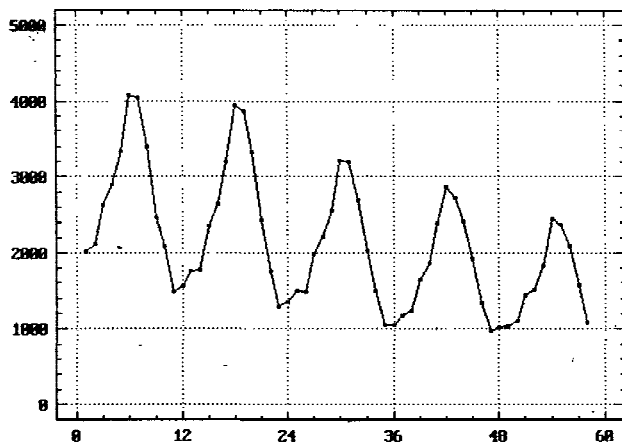


Рис. 11.2. Ежемесячное производство молока в России с 01.1992 по 10.1996 (в тыс. тонн)

Тем не менее, их совокупное влияние может быть устойчивым в течение достаточно длительных промежутков времени. Это обеспечивает возможность прогноза для подобных временных рядов. Если мы полностью выявим закономерную составляющую в поведении временного ряда, то оставшаяся часть выглядит хаотично и непредсказуемо. Ее обычно именуют *иррегулярной*, или *случайной компонентой* временного ряда. Обозначим эту случайную компоненту через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_n$.

Для описания и анализа случайной компоненты временных рядов обычно используют понятия и методы теории вероятностей и математической статистики.

Аддитивная и мультипликативная модели. Формы разложения (декомпозиции) временного ряда на детерминированную и случайную компоненты могут различаться. Укажем наиболее простых из них.

Определение. Аддитивной моделью временного ряда называется представление ряда в виде суммы детерминированной и случайной компонент, а именно:

$$x_t = d_t + \varepsilon_t \quad \text{при } t = 1, \dots, n \quad \text{или} \quad X = D + E. \quad (11.1)$$

Определение. Мультипликативной моделью временного ряда называется представление ряда в виде произведения детерминированной и случайных компонент, а именно:

$$x_t = d_t \times \varepsilon_t \quad \text{при } t = 1, \dots, n \quad \text{или} \quad X = D \times E$$

Мультипликативные модели часто бывают удобны при анализе экономических временных рядов.

Если в приведенном выше соотношении перейти к логарифмам, то мы вновь получим формулу (11.1) — но не для самих x_t , а для их логарифмов.

$$\log(x_t) = \log(d_t) + \log(\varepsilon_t) \quad \text{при} \quad t = 1, \dots, n$$

Указанное соотношение объясняет распространенность логарифмических шкал при анализе экономических временных рядов

11.5. Тренд, сезонная и циклическая компоненты

Способы описания детерминированных компонент временного ряда сильно зависят от области приложений. При выборе модели детерминированной компоненты должны прежде всего учитываться содержательные соображения, то есть те объективные факторы и закономерности, которые приводят к ее формированию

В экономических (и многих других) приложениях в детерминированной компоненте временного ряда d_t обычно выделяют три составляющих части: тренд tr_t , сезонную компоненту s_t и циклическую компоненту c_t . Для простоты изложения мы рассмотрим только аддитивную модель временного ряда. Мы можем записать

$$d_t = tr_t + s_t + c_t, \quad \text{при} \quad t = 1, \dots, n.$$

Замечание. В последнее время к указанным трем компонентам все чаще добавляют еще одну компоненту, именуемую интервенцией. Под интервенцией понимают существенное кратковременное воздействие на временной ряд. Примером интервенции могут служить события «черного вторника», когда курс доллара за день вырос почти на тысячу рублей. С анализом интервенций можно познакомиться в [11]

Термины «тренд», «сезонная компонента» и «циклическая компонента» не имеют однозначных общепринятых определений. Чаще всего расхождения относятся к определению тренда и циклической компоненты и связаны с различными традициями в разных науках. Мы определим их в виде, наиболее часто используемом в экономических приложениях.

Тренд. Анализ временного ряда обычно начинается с выделения именно этой компоненты. Ее присутствие или отсутствие наглядно показывает график временного ряда. Выделение тренда позволяет перейти к дальнейшей идентификации других компонент ряда.

Определение. Трендом временного ряда tr_t при $t = 1, \dots, n$ называют плавно изменяющуюся, не циклическую компоненту, описыва-

ющую чистое влияние долговременных факторов, эффект которых сказывается постепенно.

В экономике к таким факторам можно отнести:

- изменение демографических характеристик популяции, включая рост населения, изменение структуры возрастного состава, изменение географического расселения и т.д.;
- технологическое и экономическое развитие;
- рост потребления и изменение его структуры.

Действие этих и им подобных факторов происходит постепенно, поэтому их вклад исследователи предпочитают описывать с помощью гладких кривых, просто задающихся в аналитическом виде. Мы опишем некоторые модели тренда в следующем параграфе.

Сезонная компонента. Сезонная компонента отражает присущую миру и человеческой деятельности повторяемость процессов во времени. Она часто присутствует в экономических, метеорологических и других временных рядах. Сезонная компонента чаще всего служит главным источником краткосрочных колебаний временного ряда, так что ее выделение заметно снижает вариацию остаточных компонент.

Определение. *Сезонная компонента s_t временного ряда при $t = 1, \dots, n$ описывает поведение, изменяющееся регулярно в течение заданного периода (года, месяца, недели, дня и т.п.). Она состоит из последовательности почти повторяющихся циклов.*

Типичным примером сезонного эффекта является объем продаж в декабре каждого года в преддверии Рождества и нового года. А пик объема продаж товаров для школьников приходится на начало нового учебного года. Объем перевозок пассажиров городским транспортом имеет два пика — утром и вечером, причем период вечернего пика продолжительней, а сам пик менее высокий. Сезонные эффекты присущи многим сферам человеческой активности: многие виды продукции имеют сезонный характер производства, потребление товаров также имеет ярко выраженную сезонность. На графике месячных объемов продаж шампанского в течение 7 лет (рис. 11.1в) видно, что пик реализации приходится на декабрь, а спад на жаркие летние месяцы.

В некоторых временных рядах сезонная компонента может иметь плавающий или изменяющийся характер. Классическим примером подобного эффекта является праздник Пасхи, сроки которого изменяются из года в год. Поэтому локальный пик объемов междугородных перевозок во время пасхальных каникул является плавающим сезонным эффектом.

Главная идея подхода к анализу сезонных компонент заключается в переходе от сравнения всех значений временного ряда между собой к сравнению значений через определенный период времени. Это позволяет заметно снизить оценку вариации временного ряда около своего среднего значения. Так, при изучении динамики месячных объемов продаж за несколько лет данные декабря одного года обычно сравнивают с данными декабря предыдущего года, а не с данными других месяцев рассматриваемого года. Методы анализа сезонных эффектов и выделения сезонных компонент рассмотрены в пункте 12.3.2.

Циклическая компонента занимает как бы промежуточное положение между закономерной и случайной составляющими временного ряда. Если тренд — это плавные изменения, проявляющиеся на больших временных промежутках, если сезонная компонента — это периодическая функция времени, ясно видимая, когда ее период много меньше общего времени наблюдений, то под циклической компонентой обычно подразумевают изменения временного ряда, достаточно плавные и заметные для того, чтобы не включать их в случайную составляющую, но такие, которые нельзя отнести ни к тренду, ни к периодической компоненте.

Определение. *Циклическая компонента c_t временного ряда описывает длительные периоды относительного подъема и спада. Она состоит из циклов, которые меняются по амплитуде и протяженности.*

Изучение циклической компоненты полезно для прогнозирования (особенно краткосрочного).

Замечание. Выделение в экономических временных рядах циклических компонент связано с тем, что экономическая активность не растет (или спадает) постоянными темпами. Она состоит из периодов относительных подъемов и спадов. Считается, что причиной циклических изменений в экономических показателях является взаимодействие спроса и предложения. Играть роль и другие факторы: рост и истощение ресурсов, увеличение размеров капитала, используемого в бизнесе, продолжительно действующие неблагоприятные (либо благоприятные) для тех или иных отраслей сельского хозяйства погодные условия, изменения в правительственной финансовой и налоговой политике и т.п. Влияние всех этих факторов приводит к тому, что циклическую компоненту крайне трудно идентифицировать формальными методами, исходя только из данных изучаемого ряда. Поэтому для ее анализа обычно приходится привлекать дополнительную информацию в виде других временных рядов, которые оказывают влияние на изучаемый ряд, например, учитывать информацию типа налоговых льгот, перенасыщенности рынка и т.п.

Методы определения циклической компоненты в экономических временных рядах и связанные с ней индексы деловой активности относятся

ся к эконометрии и выходят за рамки материала, рассматриваемого в данной книге. Более подробно об этом можно прочесть в [135].

11.6. Модели тренда

Простейшие модели тренда. Приведем модели трендов, наиболее часто используемые при анализе экономических временных рядов, а также во многих других областях. Во-первых, это простая линейная модель

$$tr_t = b_0 + b_1 \cdot t, \quad (11.2)$$

которая, несмотря на свою простоту, оказывается полезной во многих реальных задачах. Если нелинейный характер тренда очевиден, то может подойти одна из следующих моделей:

- полиномиальная: $tr_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n$, где значение степени полинома n в практических задачах редко превышает 5;
- логарифмическая: $tr_t = \exp(b_0 + b_1 t)$. Эта модель чаще всего применяется для данных, имеющих тенденцию сохранять постоянные темпы прироста,
- логистическая: $tr_t = \frac{a}{1 + b e^{-at}}$;
- Гомперца: $\log(tr_t) = a - b \cdot r^t$, где $0 < r < 1$.

Две последние модели задают кривые тренда S-образной формы. Они соответствуют процессам с постепенно возрастающими темпами роста в начальной стадии и постепенно затухающими темпами роста в конце. Необходимость подобных моделей обусловлена невозможностью многих экономических процессов продолжительное время развиваться с постоянными темпами роста или по полиномиальным моделям, в связи с их довольно быстрым ростом (или уменьшением).

Первое представление о возможном характере тренда дает графическое представление временного ряда. Так, график роста урожайности зерновых культур (рис. 11.1а) позволяет предположить наличие линейного тренда в этом временном ряде. Аналогичное предположение очевидно справедливо и для ряда роста курса доллара весной и летом 1994 г. (рис. 11.1б).

При прогнозировании тренд используют в первую очередь для долгосрочных прогнозов. Точность краткосрочных прогнозов, основанных только на подобранной кривой тренда, как правило, недостаточна. Методы выделения и удаления тренда подробно рассматриваются в пункте 12.3.1, а также в главе 8.

О временных рядах в технических приложениях. В технических приложениях мы часто знаем физические законы или технические ха-

рактеристики механизмов, генерирующих исследуемые временные ряды. Это, разумеется, существенно облегчает исследование. Мы рассмотрим только один тип моделей временных рядов, часто используемый в технических приложениях — *полигармоническую модель*. О других моделях временных рядов, возникающих в технических приложениях, Вы можете узнать в [62], [31].

Полигармоническая модель. Простейший вариант полигармонической модели временного ряда — это косинусоидальная модель:

$$x_t = a \cos(\omega t + \theta) + \varepsilon_t \quad (11.3)$$

Здесь детерминированная компонента представляет собой косинусоидальную функцию с амплитудой a , частотой ω , периодом $2\pi/\omega$ и фазой θ . Величины a , ω и θ в выражении (11.3) являются константами.

Комментарий. В технических приложениях часто рассматриваются модели типа (11.3), в которых амплитуда a является случайной величиной с нулевым средним или фаза θ является случайной равномерно распределенной величиной в интервале $(0, 2\pi)$. Такой подход, превращающий процесс (11.3) и ему подобные в стационарные процессы, часто обусловлен необходимостью обоснования возможности применения методов исследования стационарных процессов к процессам типа (11.3).

Круг данных, описываемых чисто косинусоидальной моделью (11.3), невелик. Во-первых, часто встречаются периодические зависимости, которые описываются не косинусоидальной, а более сложной функцией. Во-вторых, обычно в изучаемом процессе можно выделить не одну, а несколько периодических компонент с разными периодами.

Как известно из математического анализа, любую гладкую периодическую функцию $G(t)$ с периодом p (то есть функцию, для которой $G(t + kp) = G(t)$ для любого целого k) можно представить в виде ряда Фурье:

$$G(t) = \sum_{j=1}^p a_j \cos(j\omega t + \theta_j), \quad (11.4)$$

где $\omega = 2\pi/p$ называется основной (Найквистовой) частотой, a_j , θ_j — некоторые параметры. Частоты $j\omega$ называются гармониками основной частоты.

Функцию, являющуюся суммой нескольких периодических функций с разными периодами, можно задать в виде $G(t) = \sum_k G_k(t) = \sum_{j,k} a_{jk} \cos(j\omega_k t + \theta_{jk})$. Таким образом, получаем следующее обобщение модели (11.3).

Определение. Говорят, что временной ряд описывается полигармонической моделью, если он представлен в виде:

$$x_t = \sum_{j,k} a_{jk} \cos(j\omega_k t + \theta_{jk}) + \varepsilon_t \quad (11.5)$$

где $\omega_k = 2\pi/p_k$, а ε_t является белым шумом (см. п. 11.7).

Пример ряда, описываемого полигармонической моделью, приведен на рис. 11.3.

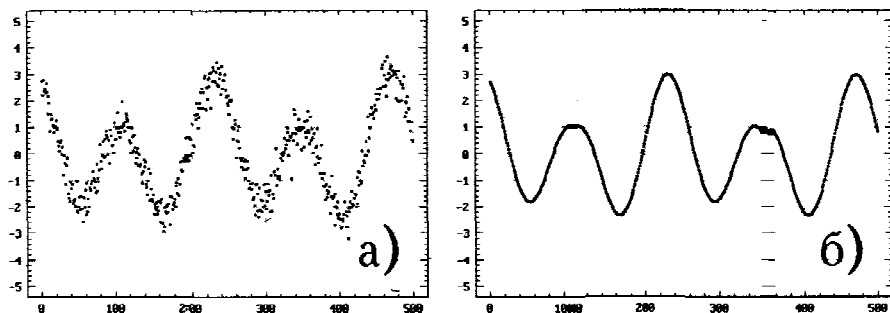


Рис 11.3. а) — 500 значений ряда, описываемого полигармонической моделью $x_t = 2 \cos(\frac{\pi}{60}t + \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{120}t) + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум с дисперсией 0.16; б) — детерминированная компонента этого ряда

Если периоды p_k известны, то для определения величин a_{jk} и θ_{jk} можно использовать методы линейного регрессионного анализа. Если периоды p_k не известны, для их определения используют методы спектрального анализа. Мы практически не будем затрагивать этот вопрос в настоящей главе, так как он требует достаточно высокой математической подготовки читателей, и ограничимся лишь кратким рассказом об одном из его простейших случаев — периодограмме (см. п. 11.10). Наиболее полный обзор современного состояния методов прикладного спектрального анализа на русском языке дан в [75]. Эти методам посвящено много различной специальной литературы: [37], [52], [87], [51], [123], [62], [31].

Исторически анализ временных рядов из различных областей деятельности, включая экономику, начинался в конце XIX и начале XX века именно с подбора полигармонических моделей для их описания. Однако с середины XX века стали появляться более простые модели и методы анализа временных рядов, включая линейные параметрические модели типа авторегрессии-скользящего среднего, на которых и будет в основном сосредоточено наше внимание.